ETS de ARQUITECTURA de MADRID,

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESTRUCTURAS I

EJERCICIOS SOBRE SOLIDO DEFORMABLE (II)

Planteamiento: ALMUDENA MAJANO MAJANO.

Desarrollo: RUBÉN CONDE GÓMEZ, MARÍA LUCÍA CERMEÑO.

Con la Colaboración de: ALMUDENA MAJANO MAJANO, JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO, JOAQUÍN ANTUÑA BERNARDO.

MADRID, Junio 2013 (v1)

La colaboración de los alumnos Rubén Conde Gómez y María Lucía Cermeño ha sido posible gracias al proyecto de innovación educativa IE12_13-03013 financiado por la Universidad Politécnica de Madrid en el curso 2012-13.

PRÁCTICA 06. SÓLIDO DEFORMABLE (II)

INTRODUCCIÓN

El objetivo fundamental de la práctica es ser capaz de analizar una estructura hiperestática sencilla mediante análisis elástico y plástico.

Como obra de referencia se ha elegido un puenteconstruído sobre la autopista A-6 (Madrid-La Coruña), a la altura del km 20, junto a la localidad de Las Rozas (véase Fig. 1yFig. 2).

Es un puente atirantado asimétrico de 102 m de luz con un ancho de tablero de 20 m. El tablero posee una sección mixta con un cajón metálico de 9 m de ancho y 1.5 m de canto, voladizos metálicos cada 3 m, y una losa de hormigón de 22 cm.Está suspendido por 9 parejas de tirantes centrales de acero que parten de un único mástil. Los tirantes se anclan al mástil por medio de dos grandes chapas triangulares de 60 mm de espesor dispuestas en la dirección del tiro. Estos elementos triangulares concentran toda la carga y la transmiten al mástil.El mástil está formado por dos células triangulares con una altura de 39 m, e incluyen unas bielas inclinadas comprimidas, los tirantes rígidos metálicos y los puntales horizontales que junto con el estribo hacen que las reacciones que llegan al terreno sean prácticamente verticales al absorber los esfuerzos horizontales. El mástil se ancla al estribo contrapeso, formado por células rellenas de terreno hasta alcanzar la carga del tiro. El estribo contrapeso tiene por tanto una triple misión: dar apoyo al tablero (mediante apoyos verticales y horizontales de neopreno), recoger las cargas de los apoyos de bielas y anclajes de retenida de los pórticos metálicos que conforman el mástil, y materializar el contrapeso que compensa el tiro vertical de los tirantes de contrarresto.

Fig. 1Vista del puente desde A6 dirección Madrid

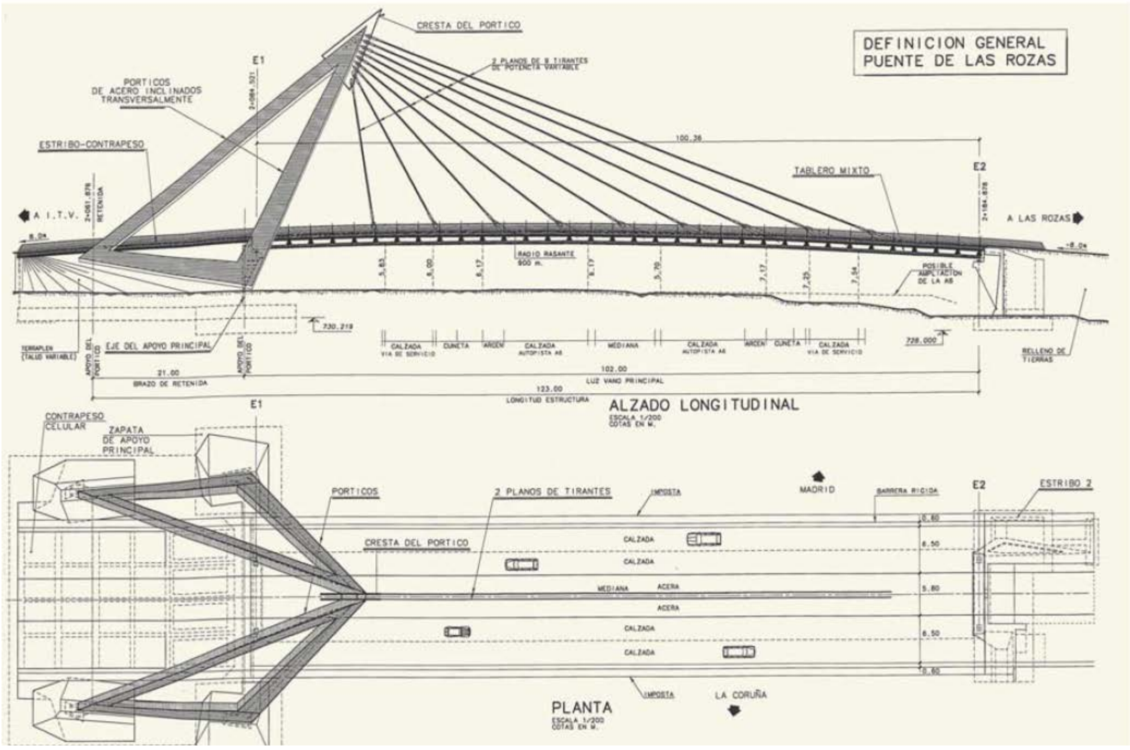


Fig. 2Planta y alzado.

ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA

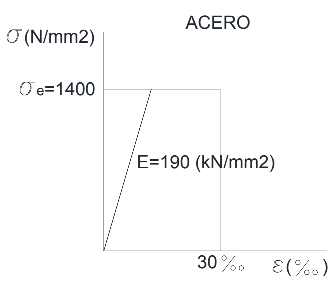
En la presente práctica, se abordará el análisis de una estructura similar a este puente, pero simplificada; una estructura plana donde, salvo dos tirantes, el resto de las barras se considerarán rígidas. El extremo del tablero se supondrá en voladizo aunque en la estructura real esté apoyado.

CASO 1. Tablero con dos elementos articulados entre sí (AE y ED), lo que hace que la estructura sea isostática (Fig. 3).

$q = 32$ kN/m

$A_1 = 2800$ mm^2

$A_2 = 2200$ mm^2



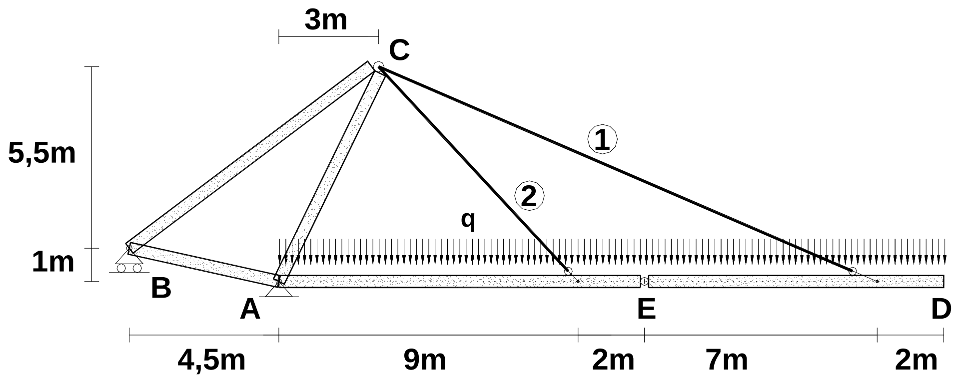


Fig. 3Estructura caso 1.

SOLICITACIÓN DE LOS CABLES

Para calcular la solicitación de los cables, es necesarioseccionar la estructura. Se aísla el fragmento de tablero ED (Fig. 4). Se establece la condición de equilibrio de momentos en la articulación E.

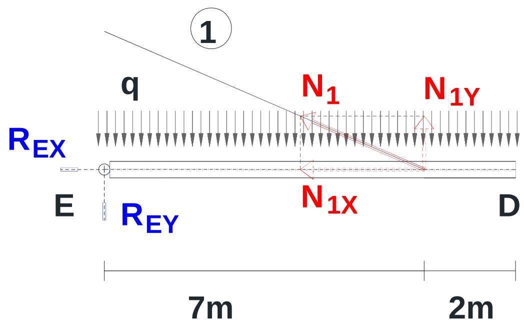


Fig. 4Análisis del Tramo ED.

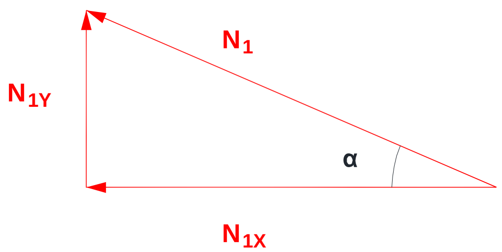


Fig. 5 Esfuerzo N_1.

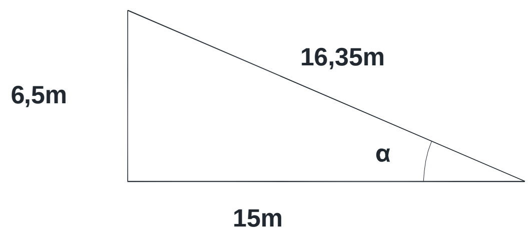


Fig. 6 Triángulo formado por el cable 1.

$$\tan\alpha = \frac{6,5}{15}; \qquad \alpha = 23,43^{\circ}$$

$$\sum M_E = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -q \cdot 9 \cdot \frac{9}{2} + 7 \cdot N_1 \cdot \mathrm{sen}\,\alpha = 0$$

$$N_1 = \frac{q \cdot 40,5}{7 \cdot \mathrm{sen}\alpha} = \frac{32 \cdot 40,5}{7 \cdot \mathrm{sen} 23,43}$$

$\boxed{N_1 = 465,62\ kN}$ ←⊞→ TRACCIÓN - SOLICITACIÓN CABLE 1

Para calcular la solicitación del cable 2, se secciona la estructura por la articulación A, y se aísla la mitad derecha (Fig. 7).Se establece la condición de equilibrio de momentos en el punto A:

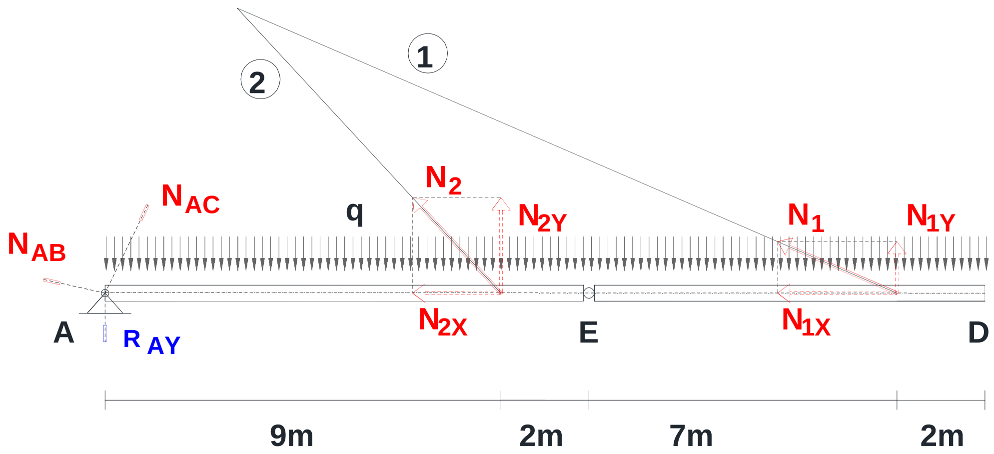


Fig. 7Análisis del Tramo AD.

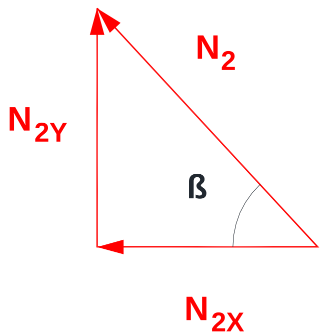


Fig. 8 Esfuerzo N_2.

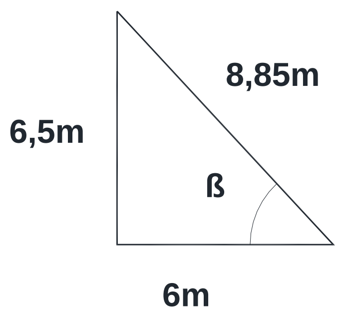


Fig. 9 Triángulo formado por el cable 2.

$$\tan\beta = \frac{6,5}{6}; \qquad \beta = 47,29^{\circ}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -q \cdot 20 \cdot \frac{20}{2} + 18 \cdot N_1 \cdot \mathrm{sen}\alpha + 9 \cdot N_2 \cdot \mathrm{sen}\beta = 0$$

$$N_2 = \frac{+q \cdot 20 \cdot 10 - 18 \cdot N_1 \cdot \mathrm{sen}\alpha}{9 \cdot \mathrm{sen}\beta} = \frac{+32 \cdot 20 \cdot 10 - 18 \cdot 465,62 \cdot \mathrm{sen} 23,43}{9 \cdot \mathrm{sen} 47,29}$$

$\boxed{N_2 = 463,83\ kN}$ ←⊞→ TRACCIÓN - SOLICITACIÓN CABLE 2

TENSIONES

Conociendo la solicitación de cada cable y su área, sepuede deducir la tensión a la que están sometidos aplicando las siguientes expresiones.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{465,62}{2800} = 0,166; \quad \boxed{\sigma_1 = 166,29 \ \frac{N}{mm^2}}$$ TENSIÓN CABLE 1

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{463,83}{2200} = 0,211; \quad \boxed{\sigma_2 = 210,83 \ \frac{N}{mm^2}}$$ TENSIÓN CABLE 2

Ninguno de los cables supera σ_e , portanto se encuentran en régimen elástico.

ALARGAMIENTO DE CADA CABLE

A partir del valor de las tensiones y conociendo la rigidez del material, se pueden determinarlosalargamientos delos cables de la siguiente manera:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E}$$

$$\Delta L_1 = \frac{\sigma_1 \cdot L_1}{E} = \frac{166,29 \cdot 16,34}{190}; \quad \boxed{\Delta L_1 = 14,3 \ mm}$$ ALARGAMIENTO CABLE 1

$$\Delta L_2 = \frac{\sigma_2 \cdot L_2}{E} = \frac{210,83 \cdot 8,85}{190}; \quad \boxed{\Delta L_2 = 9,82 \ mm}$$ ALARGAMIENTO CABLE 2

VALOR DE LAS REACCIONES A Y B

Para el cálculo de las reacciones en A y B se plantea el equilibrio global del conjunto (Fig. 10).

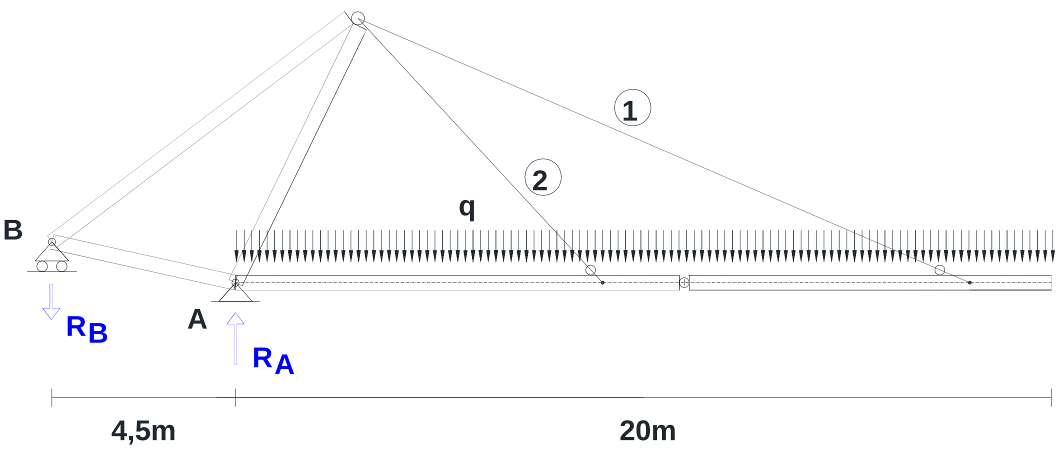


Fig. 10 Análisis del conjunto.

Primeramente se toman momentos en el vínculo B para determinar la componente vertical de la reacción en A:

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow +4,5 \cdot R_{AY} - q \cdot 20 \cdot 14,5 = 0$$

$$R_{AY} = \frac{q \cdot 20 \cdot 10}{4,5} = \frac{32 \cdot 20 \cdot 14,5}{4,5}; \quad \boxed{R_{AY} = 2062,2\ kN}$$ REACCIÓN VERTICAL EN A

A continuación se toman momentos en A para obtener la reacción en B:

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -q \cdot 20 \cdot 10 + 4,5 \cdot R_B = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 20 \cdot 10}{4,5} = \frac{32 \cdot 20 \cdot 10}{4,5}; \quad \boxed{R_B = 1422,22\ kN}$$ REACCIÓN EN B

Con el objetivo de realizar una doble comprobación, se establece la condición de equilibrio de fuerzas verticales:

$$\sum F_Y = 0 \quad (+\uparrow) \Rightarrow \quad -R_B + R_A - q \cdot 20 = 0$$

$$-1422,2 + 2062,2 - 640 = 0$$

Se verifica la igualdad.

CARGA ÚLTIMA q_u

Se considera carga última la máxima carga que puede resistir una estructura antes de que se produzca el colapso. El cable 2 es el más tensionado. Por tanto, si se aumenta la carga gradualmente, éste será el primero en plastificar. Al plastificar se alargará incontroladamente hasta romper, produciendo así el colapso de la estructura (el tramo ED de tablero está unido por una rótula que no limita el movimiento del mismo).

Al plastificar, la tensión a considerar es $\sigma_e = 1400 \ \frac{N}{mm^2}$

Y por tanto la solicitación última del cable 1 adquiriría el siguiente valor:

$$N_{1u} = 1400 \cdot 2800 = 3920\ kN$$

Finalmente se calcula la carga última aplicando equilibrio de momentos respecto el punto E:

$$\sum M_E = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -q_u \cdot 9 \cdot 4,5 + 7 \cdot N_{1u} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$q_u = \frac{7 \cdot N_{1u} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{9 \cdot 4,5} = \frac{7 \cdot 3920 \cdot \operatorname{sen}23,43}{9 \cdot 4,5}; \quad \boxed{q_u = 269,4\ kN}$$ CARGA ÚLTIMA

CASO 2. Tablero continuo, como sólido rígido, que produce una estructura hiperestática(Fig. 11). Para reducir el problema a un solo grado de libertad, se supondrá que las barras AB, BC, AC son también rígidas, siendo deformables sólo los dos cables 1 y 2.

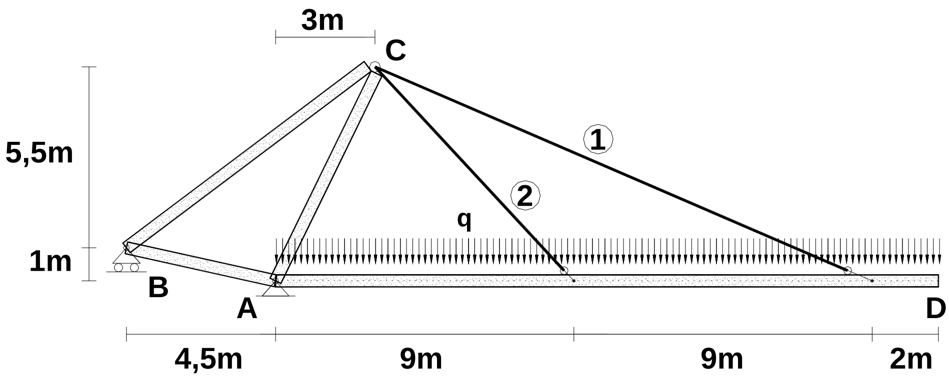


Fig. 11 Estructura hiperestática.

SOLICITACIÓN DE CADA CABLE

Al tratarse de una estructura hiperestática, las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para determinar las reacciones y solicitaciones. Se necesitan por tanto ecuaciones adicionales obtenidas por compatibilidad de movimientos.

Es una estructura con un solo grado de libertad. Se considerará como tal el giro respecto la articulación A (Fig. 12).

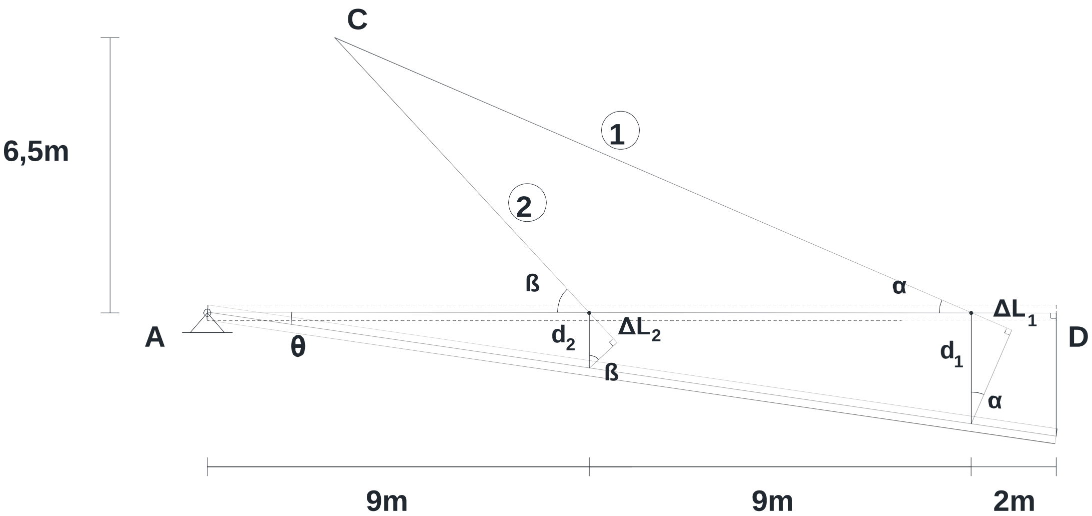


Fig. 12Giro del tablero.

Para el cable 1 se cumplen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\tan\theta = \frac{\delta_1}{18}; \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\Delta L_1}{\delta_1}$$

Como el giro de la estructura es muy pequeño, se puede aproximar a su tangente:

$$\tan\theta \approx \theta; \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\delta_1}{18}; \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\Delta L_1}{\delta_1}$$

Igualando $\delta_1$se obtiene:

$$\theta \cdot 18 = \frac{\Delta L_1}{\operatorname{sen}\alpha}; \quad \Delta L_1 = \operatorname{sen}\alpha \cdot \theta \cdot 18$$

De la misma manera, para el cable 2:

$$\tan\theta = \frac{\delta_2}{18}; \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\Delta L_2}{\delta_2}$$

e igualandoδ_2:

$$\theta \cdot 9 = \frac{\Delta L_2}{\operatorname{sen}\beta}; \quad \Delta L_2 = \theta \cdot 9 \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Estas ecuaciones sonlasecuaciones de compatibilidad. Relacionan movimientos con deformaciones.

A continuación se plantean las ecuaciones constitutivas:

$$N = K \cdot \Delta L; \qquad K = \frac{E \cdot A}{L}$$

$$N_1 = K_1 \cdot \Delta L_1; \quad K_1 = \frac{E \cdot A_1}{L_1}; \qquad K_1 = \frac{190 \cdot 2800}{16,35} = 32538,22 \ \frac{kN}{m}$$

$$N_2 = K_2 \cdot \Delta L_2; \quad K_2 = \frac{E \cdot A_2}{L_2}; \qquad K_2 = \frac{190 \cdot 2200}{8,85} = 47231,64 \ \frac{kN}{m}$$

El esfuerzo de cada cable queda por tanto en función de su alargamiento y de las características del material.

Se plantea ahora el equilibrio de momentos en el vínculo A (Fig. 13):

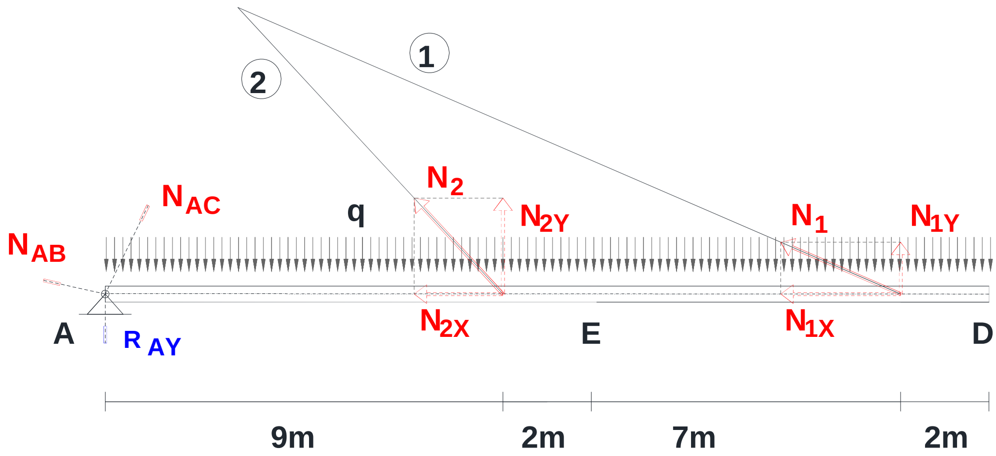


Fig. 13 Análisis tramo AD.

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow +N_1 \cdot \text{sen}\alpha \cdot 18 + N_2 \cdot \text{sen}\beta \cdot 9 - q \cdot 20 \cdot 10 = 0$$

Se sustituye en la expresión anterior N_1 y N_2(ecuaciones constitutivas):

$$K_1 \cdot \Delta L_1 \cdot \text{sen}\alpha \cdot 18 + K_2 \cdot \Delta L_2 \cdot \text{sen}\beta \cdot 9 - q \cdot 20 \cdot 10 = 0$$

Y ΔL_1 y ΔL_2(ecuaciones de compatibilidad):

$$K_1 \cdot \theta \cdot \text{sen}^2\alpha \cdot 18^2 + K_2 \cdot \theta \cdot \text{sen}^2\beta \cdot 9^2 - q \cdot 20 \cdot 10 = 0$$

Tendríamos por tanto una ecuación con una sola incógnita, el giro del tablero,θ:

$$\theta = \frac{q \cdot 20 \cdot 10}{K_1 \cdot \text{sen}^2\alpha \cdot 18^2 + K_2 \cdot \text{sen}^2\beta \cdot 9^2}$$

$$\theta = \frac{32 \cdot 20 \cdot 10}{32538,22 \cdot \text{sen}^2 23,43 \cdot 18^2 + 47231,64 \cdot \text{sen}^2 47,29 \cdot 9^2} = 1,71 \cdot 10^{-3} \quad rad$$

$$\theta = 1,71 \quad mrad$$

Conociendo el valor del giro, se pueden ir deduciendo el restopropiedades. Sustituyéndolo en las ecuaciones constitutivas, se obtiene la solicitación de cada cable:

$$N_1 = K_1 \cdot \Delta L_1; \quad N_1 = K_1 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \theta \cdot 18; \quad N_1 = 32538,22 \cdot \text{sen} 23,43 \cdot (1,71 \cdot 10^{-3}) \cdot 18 = 398,24 \quad kN$$
$$N_2 = K_2 \cdot \Delta L_2; \quad N_2 = K_2 \cdot \text{sen}\beta \cdot \theta \cdot 9; \quad N_2 = 47231,64 \cdot \text{sen} 47,29 \cdot (1,71 \cdot 10^{-3}) \cdot 9 = 534,12 \quad kN$$

$N_1 = 398,24 \quad kN$	←⊞→ TRACCIÓN - SOLICITACIÓN CABLE 1
$N_2 = 534,12 \quad kN$	←⊞→ TRACCIÓN - SOLICITACIÓN CABLE 2

TENSIONES

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{398,24}{2800} = 0,142; \quad \boxed{\sigma_1 = 142,23 \ \frac{N}{mm^2}}$$ TENSIÓN CABLE 1

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{534,12}{2200} = 0,243; \quad \boxed{\sigma_2 = 242,78 \ \frac{N}{mm^2}}$$ TENSIÓN CABLE 2

ALARGAMIENTOS

Empleando las ecuaciones de compatibilidad, se obtienenlos alargamientos de los cables:

$$\Delta L_1 = \operatorname{sen}\alpha \cdot \theta \cdot 18 = \operatorname{sen} 23,43 \cdot (1,71 \cdot 10^{-3}) \cdot 18; \quad \boxed{\Delta L_1 = 12,24 \ mm}$$ ΔL CABLE 1

$$\Delta L_2 = \operatorname{sen}\beta \cdot \theta \cdot 9 = \operatorname{sen} 47,29 \cdot (1,71 \cdot 10^{-3}) \cdot 9; \quad \boxed{\Delta L_2 = 11,31 \ mm}$$ ΔL CABLE 2

DESCENSO DEL PUNTO D

Como el giro es muy pequeño, se puede aproximar el arco de circunferencia a una línea perpendicular en el extremo del tablero (Fig. 14). Por trigonometría se deduce el descenso del punto D.

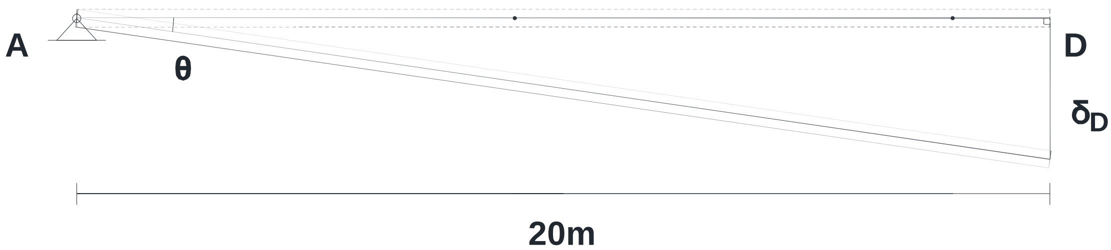


Fig. 14. Descenso del punto D.

$$\tan\theta = \frac{\delta_D}{20}; \quad \tan\theta \approx \theta; \quad \delta_D = \theta \cdot 20 = (1,71 \cdot 10^{-3}) \cdot 20 = 0,0342 \ m$$

$$\boxed{\delta_D = 34,2 \ mm}$$ DESCENSO DEL PUNTO D

VALOR DE LAS REACCIONES A Y B

Al igual que en el caso 1, para hallar las reacciones se plantea el equilibrio global del conjunto (Fig. 15).

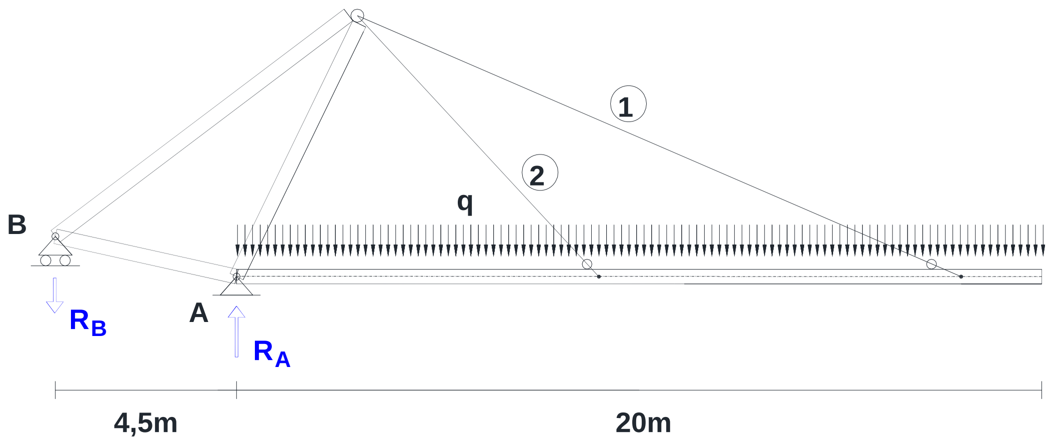


Fig. 15 Análisis del conjunto.

Para determinar la reacción en el vínculo A, se toman momentos en B:

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow +4,5 \cdot R_{AY} - q \cdot 20 \cdot 14,5 = 0$$

$$R_{AY} = \frac{q \cdot 20 \cdot 10}{4,5} = \frac{32 \cdot 20 \cdot 14,5}{4,5}; \quad \boxed{R_{AY} = 2062,2\ kN} \quad \text{REACCIÓN VERTICAL EN A}$$

Del mismo modo, para obtener la reacción en B plantea el equilibrio de momentos respecto al punto A.

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -q \cdot 20 \cdot 10 + 4,5 \cdot R_B = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 20 \cdot 10}{4,5} = \frac{32 \cdot 20 \cdot 10}{4,5}; \quad \boxed{R_B = 1422,22\ kN} \quad \text{REACCIÓN EN B}$$

Como comprobación adicional, se establece la condición de equilibrio de fuerzas verticales:

$$\sum F_Y = 0 \quad (+\uparrow) \Rightarrow \quad -R_B + R_A - q \cdot 20 = 0$$

$$-1422,2 + 2062,2 - 640 = 0$$

Se verifica la igualdad.

CARGA ÚLTIMA q_u

Se está trabajando sobre una estructura hiperestática cuyo tablero es sustentado por dos cables. Esto significa que es necesario que ambos cables plastifique para considerar que la estructura colapsa. Por tanto, los dos cables estarían trabajando con $\sigma_e = 1400\ \frac{N}{mm^2}$.

Las solicitaciones últimasque soportaría cada cable serían:

$$N_{U1} = A_1 \cdot \sigma_e = 2800 \cdot 1400; \quad N_{U1} = 3920 \ kN$$
$$N_{U2} = A_2 \cdot \sigma_e = 2200 \cdot 1400; \quad N_{U2} = 3080 \ kN$$

Y planteando equilibrio de momentos en el punto A, se obtiene finalmente la carga última que sería capaz de resistir la estructura.

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow +N_{U1} \cdot \text{sen}\alpha \cdot 18 + N_{U2} \cdot \text{sen}\beta \cdot 9 - q_U \cdot 20 \cdot 10 = 0$$

$$q_U = \frac{N_{U1} \cdot \text{sen}\alpha \cdot 18 + N_{U2} \cdot \text{sen}\beta \cdot 9}{20 \cdot 10};$$

$$q_U = \frac{3920 \cdot \text{sen}23,43 \cdot 18 + 3080 \cdot \text{sen}47,29 \cdot 9}{20 \cdot 10}$$

$\boxed{q_U = 242,13 \ \frac{kN}{m}}$ CARGA ÚLTIMA